Е. Н. Смирнова

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия,

Smirnova_ chgpu@mail.ru

ДВОЙСТВЕННЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГИПЕРПОЛОСЕ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I},\ \bar{K},\ \bar{L} = \overline{0,n};\ \ I,\ K,\ L = \overline{1,n};\ i,\ j,\ k,\ s,\ t = \overline{1,m};$$

$$u,\ v = \overline{m+1,n-1};\ \alpha = \overline{m+1,n}.$$

Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n; деривационные формулы проективного репера $R = \{\mathrm{A}_{\bar{I}}\}$ и структурные уравнения проективного пространства соответственно имеют вид [5]:

$$d\mathrm{A}_{\bar{I}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}\mathrm{A}_{\bar{K}}, \quad D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{I}}^{\bar{L}} \wedge \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\ \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}} = 0. \tag{1}$$

Проективно-метрическим пространством K_n [2] называется проективное пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1}^2 (абсолют). В работе [4] в случае $\mathrm{A}_0 \notin Q_{n-1}^2$ показано, что уравнение абсолюта пространства K_n можно записать в виде

$$\begin{gathered} a_{IK}x^I x^K + \tfrac{1}{c}\left(g_{I0}x^I + cx^0\right)^2 = 0, \\ a_{[IK]} = 0, g_{0I} = g_{I0},\ c = \mathrm{const} \neq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

причем условие его неподвижности определяется уравнениями

$$da_{IK} - a_{IL}\omega_K^L - a_{LK}\omega_I^L = -\frac{1}{c}(a_{IL}g_{K0} + a_{KL}g_{I0})\omega_0^L,$$

$$dg_{I0} - g_{L0}\omega_I^L - c\omega_I^0 = a_{IL}\omega_0^L.$$

Согласно работе [1], m-мерной гиперполосой H_m в P_n называется m-параметрическое многообразие таких плоских элементов (A, T_{n-1}), $m < n-1$, что точка описывает поверхность V_m, а гиперплоскости $T_{n-1}(A)$ касаются этой поверхности в соответствующих точках A поверхности V_m.

Поверхность V_m называется базисной поверхностью гиперполосы H_m , а гиперплоскости $T_{n-1}(A)$ — главными касательными гиперплоскостями гиперполосы H_m.

В пространстве K_n рассмотрим регулярную гиперполосу H_m. Известно [3], что относительно репера R первого порядка (A_0 совпадает с A, A_i принадлежат касательной плоскости $T_m(A_0)$ к поверхности V_m в её точке A_0 и вершины A_v располагаются на характеристике $\pi_{n-m-1}(A_0)$ главной касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A)$) подмногообразие H_m определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega_0^\alpha = 0,\ \omega_v^n = 0,\ \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \omega_i^v = \Lambda_{ij}^v \omega_0^j,\ \omega_v^i = \mathrm{N}_{vj}^i \omega_0^j, \qquad (3)$$

причем $\Lambda_{[ij]}^\alpha = 0,\ \Lambda_{s[i}^n N_{|v|j]}^s = 0$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Регулярная гиперполоса H_m проективно метрического пространства K_n с абсолютом Q_{n-1}^2 индуцирует:*

1) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\bar{P}_n(V_m)$, двойственное [3] *$K_n(V_m)$ относительно инволютивного преобразования структурных форм;*

2) во второй дифференциальной окрестности двойственный образ $\bar{H}_m$.

Теорема 2. *В пространстве K_n на двойственно нормализованной регулярной гиперполосе H_m в касательном расслоении $T_m(H_m)$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ с нулевыми кручениями, причем эти связности сопряжены относительно поля главного фундаментального тензора Λ^n_{ij} гиперполосы.*

Теорема 3. *Связность $\overset{0}{\nabla}$, средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, является вейлевой с полем невырожденного метрического тензора Λ^n_{ij}; связность $\overset{0}{\nabla}$ является римановой тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор T_{st} $(T_{st} = \nu_{[st]} - \nu^k_{n[s}\Lambda^n_{t]k} - \frac{1}{c}\nu_{[s}g_{t]0})$.*

Теорема 4. *Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ эквиаффинны тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор T_{st} обращается в нуль. В частности, если гиперполоса H_m нормализована полями квазитензоров $\{\Phi^i_n, \Phi_i\}$ $(\Phi^i_n = \Lambda^{ik}_n B_k$, $\Phi_i = -\frac{1}{c}g_{i0})$, то связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ эквиаффинны лишь одновременно. Средняя связность $\overset{0}{\nabla}$ в этом случае является римановой.*

Теорема 5. *Аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперполосы H_m пространства K_n полями квазитензоров $\{\nu^i_n, \nu_i\}$ является полярной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик и гиперполоса H_m имеет соприкосновение третьего порядка с гиперквадриками этого поля.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. *Теория поля локальных гиперполос* // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. – 1950. – Вып. 8. – С. 197-272.

2. Лаптев Г. Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275-382.

3. Столяров А. В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары: Чувашский госпедуниверситет им. И.Я. Яковлева, 1994. – 290 с.

4. Столяров А. В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – Калининград: Калининградск. ун-т, 2001. – Вып. 32. – С. 94-101.

5. Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

А. А. Соболев, М. Р. Тимербаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

andreyasob@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ 2-ТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ 4-ГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Работа посвящена исследованию свойств решения и построению схем метода конечных элементов (МКЭ) для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на интервале $\Omega = (0, 1)$

$$Au \equiv D^2\big(x^\alpha a(x) D^2 u(x)\big) - D\big(a_1(x) Du(x)\big) + a_0(x) u(x) = f(x)$$

с однородными граничными условиями Дирихле

$$u(0) = Du(0) = u(1) = Du(1) = 0.$$